



دوشنبه
۱۴۰۴/۰۱/۰۴

دفترچه پاسخ

جامع مثلثات
(فصل ۲ دهم + فصل ۴ یازدهم +
فصل ۲ دوازدهم)

دوبینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی ریاضی

دروس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضی	حسین شفیع زاده محدثه شیخعلی مهرداد کیوان	حسین شفیع زاده مهرداد کیوان	فرشاد حسن زاده ارسلان حسنونند - سجاد احمدی

جامع شمارش، بدون شمردن و آمار و احتمال	الگو و دنباله + توان های گویا + جامع هندسه	جامع حد و پیوستگی + مشتق و کاربرد مشتق	جامع مثلثات	جامع تابع + توابع نمایی و لگاریتمی	مباحث پایه
هفته ششم	هفته پنجم	هفته چهارم	هفته سوم	هفته دوم	هفته اول

۵۵ روز جمع بندی تا کنکور اردیبهشت

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هر گونه استفاده غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.



دانش آموزان عزیز ما ❤️

امیدواریم از آزمون امروزمون لذت برده باشید.

اهمیت فصل مثلثات

مثلثات تو علوم ریاضیات، برای اندازه‌گیری فاصله‌ها به طور غیرمستقیم استفاده میشه و اولین بار تو اخترشناسی (نجوم) برای به دست آوردن فاصله بین اجرام آسمانی استفاده می‌شد ولی امروزه تو فیزیک، نقشه‌برداری، ناوبری و ... هم به شدت کاربرد داره. ساده‌ترین کاربرد مثلثات تو مثلث قائم‌الزاویه هستش که تو سال اول، درس یک حتماً باهاش آشنا شدین، البته هر شکل هندسی دیگه رو هم میشه به صورت مثلث قائم‌الزاویه تبدیل کرد تا از مثلثات کمک گرفت. اما میشه تعریف اصلی و ساده‌تر رو به کمک دایره مثلثاتی بیان کرد و کل تعاریف، فرمول‌ها، نمودارها و ... رو به کمک دایره مثلثاتی درک کرد و یاد گرفت.

پیش‌نیازهای مطالعه این بخش کدام مباحث هستند؟

مثلثات یک مفهوم جدید و برای یادگیریش نیاز به مطالعه قبلی نیست اما تو بعضی جاها به اشکال هندسی و به معادله خط و یا حتی به حل معادله (سوالات معادلات مثلثاتی دوازدهم) و انتقال نمودار برای رسم توابع مثلثاتی و ... ربط پیدا می‌کنه پس مرور مفاهیم پایه ریاضیات میتونه تو یادگیری هر چه بهترتون تاثیرگذار باشه.

این بخش در کدام قسمت‌ها کاربرد دارد؟

این بخش تقریباً تو همه بخش‌های دیگه استفاده میشه و قابل ترکیب و تو کنکور هم اتفاقاً سوالات ترکیبی داریم (ترکیب با تابع، حد و مشتق و کاربرد مشتق مهمترین این ترکیبات هستن). البته تو فیزیک نیز به شدت کاربرد داره. فصل ۳ فیزیک دهم (تجزیه برداری نیروها برای محاسبه کار)، فصل سوم فیزیک یازدهم (محاسبه نیروی مغناطیسی وارد بر سیم حامل جریان و ذره و جریان متناوب) و فصل ۳ دوازدهم (معادله حرکت هماهنگ ساده) کاربردهای مثلثات تو فیزیک هستن.

از این بخش در کنکور سال‌های قبل چه تعداد سوال طرح شده است؟ این سوالات از چه موضوعاتی بوده؟

کنکور سراسری	۱۴۰۰	۱۴۰۱	۱۴۰۲ نوبت اول	۱۴۰۲ نوبت دوم	۱۴۰۳ نوبت اول	۱۴۰۳ نوبت دوم
تعداد سوال	۳	۴	۴	۴	۴	۵
مباحث مطرح شده در سوال	نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم، مکمل و ... نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دو برابر کمان معادلات مثلثاتی	محدوده تغییرات نسبت‌های مثلثاتی اتحادهای مثلثاتی نمودار توابع مثلثاتی معادلات مثلثاتی	نسبت‌های مثلثاتی رابطه شیب خط با تانژانت زاویه کاربردهای مثلثات معادلات مثلثاتی	اتحادهای مثلثاتی طول کمان نمودار توابع مثلثاتی معادلات مثلثاتی	نسبت‌های مثلثاتی زوایا (۲ سوال) معادلات مثلثاتی نمودار توابع مثلثاتی	اتحادهای مثلثاتی کاربردهای مثلثات (۲ سوال) معادلات مثلثاتی نمودار توابع مثلثاتی

حالا برین تحلیل آزمون رو شروع کنین که به‌نظرم تحلیل آزمون و مشخص شدن ایرادها از خود آزمون دادن مهم‌تره. آرزومند آرزوهایتان... ❀

حسین شفیع‌زاده - رتبه ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز



۱- در مثلث ABC به مساحت ۲۴، اگر $AB=12$ و $AC=8$ باشد، مجموع زوایای قابل قبول برای رأس A چند رادین است؟

$\frac{\pi}{2}$ (۴)

π (۳)

$\frac{7\pi}{6}$ (۲)

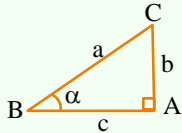
$\frac{5\pi}{3}$ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳

$$S = \frac{1}{2} AB \times AC \times \sin A \Rightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \times \sin \hat{A}$$

$$\Rightarrow \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{6} \text{ یا } \frac{5\pi}{6} \Rightarrow \text{مجموع} = \pi$$



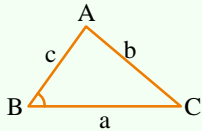
$$\sin \alpha = \frac{b}{a}$$

$$\cos \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\tan \alpha = \frac{b}{c}$$

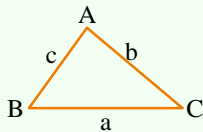
$$\cot \alpha = \frac{c}{b}$$

نسبت‌های مثلثاتی در یک قاب



$$S = \frac{1}{2} ac \sin \hat{B} = \frac{1}{2} ab \sin \hat{C} = \frac{1}{2} bc \sin \hat{A}$$

مساحت مثلث به کمک سینوس



$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$$

و این سینوس پرماجر!

گروه آموزشی ماز

۲- اگر $a \sin^2 x + 5 \cos^2 x = 4$ باشد، حاصل $a + \cot^2 x$ کدام است؟

۴ (۴)

۶ (۳)

۳ (۲)

۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

دو طرف تساوی را بر $\sin^2 x$ تقسیم می‌کنیم.

$$a + 5 \cot^2 x = \frac{4}{\sin^2 x} = 4(1 + \cot^2 x) \Rightarrow a + 5 \cot^2 x = 4 + 4 \cot^2 x \Rightarrow a + \cot^2 x = 4$$

گروه آموزشی ماز

۳- محیط مثلث ABC برابر ۱۸ است. اگر $\tan B = \frac{3}{4}$ و $\tan C = \frac{12}{5}$ باشد، طول ضلع BC کدام است؟

۸ (۴)

۶ (۳)

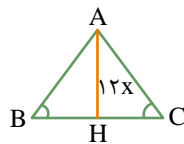
۹ (۲)

۷ (۱)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

فرض کنید $AH = 12x$ باشد.



$$\tan B = \frac{3}{4} = \frac{12x}{BH} \Rightarrow BH = 16x \Rightarrow AB = 20x$$

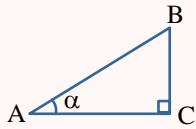
$$\tan C = \frac{12}{5} = \frac{12x}{HC} \Rightarrow HC = 5x \Rightarrow AC = 13x$$

$$\text{محیط} = 18 = 13x + 20x + 12x = 45x \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow BC = 12x = 4$$



برای نسبت‌های مثلثاتی دنبال مثلث قائم‌الزاویه بگرد...

برای زاویه حاده α در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:



$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل } \alpha}{\text{ضلع مجاور } \alpha} = \frac{BC}{AC}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{AC}{AB}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور } \alpha}{\text{ضلع مقابل } \alpha} = \frac{AC}{BC}$$

گروه آموزشی ماز

۴- اگر α در ناحیه چهارم دایره مثلثاتی و $\sin(\frac{\pi}{4} + \alpha) + 4 \cos \alpha = 3$ باشد، مقدار $\tan \alpha - \cot \alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{12}$

۲) $-\frac{7}{12}$

۳) $\frac{25}{12}$

۴) $-\frac{25}{12}$

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$\cos \alpha + 4 \cos \alpha = 3 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

$$\tan \alpha - \cot \alpha = -\frac{4}{3} + \frac{3}{4} = -\frac{7}{12}$$

تبدیلات نسبت‌های مثلثاتی $\frac{(2k+1)\pi}{2} \pm \alpha$ چطوری انجام می‌شه؟!

۱) برای مشخص کردن علامت نسبت‌های مثلثاتی باید بدانیم که زاویه $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه اول، زاویه $(\frac{\pi}{2} + \alpha)$ در ناحیه دوم، زاویه $(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$ در ناحیه سوم و زاویه $(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$ در ناحیه چهارم مثلثاتی قرار دارد.

۲) با توجه به حضور مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ داخل کمان، ماهیت نسبت‌های مثلثاتی تغییر می‌کند:

$(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$
$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$
$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$
$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = +\cot \alpha$
$\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = +\tan \alpha$

$(\frac{3\pi}{2} + \alpha)$
$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$
$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = +\sin \alpha$
$\tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$
$\cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$

$(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\cos \alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\sin \alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\cot \alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = +\tan \alpha$

$(\frac{\pi}{2} + \alpha)$
$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = +\cos \alpha$
$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$
$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$

گروه آموزشی ماز

۵- اگر مقادیر $A = 2m \sin 198^\circ - 3 \cos 252^\circ$ و $B = 2m \sin 162^\circ + 3m \cos 108^\circ$ برابر باشند، مقدار m کدام است؟

۱) ۱

۲) $-\frac{1}{5}$

۳) $\frac{1}{5}$

۴) -۱

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$A = 2m \sin(180^\circ + 18^\circ) - 3 \cos(270^\circ - 18^\circ) = -2m \sin 18^\circ + 3 \sin 18^\circ$$

$$B = 2 \sin(180^\circ - 18^\circ) + 3m \cos(90^\circ + 18^\circ) = 2 \sin 18^\circ - 3m \sin 18^\circ$$

$$A = B \Rightarrow -2m + 3 = 2 - 3m \Rightarrow m = -1$$



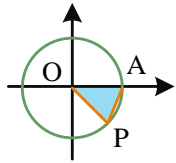
تبدیل نسبت‌های مثلثاتی **azmonvip**

$$\begin{aligned} \sin(k\pi \pm \alpha) &= \dots \sin \alpha & \sin\left((2k-1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \dots \cos \alpha \\ \cos(k\pi \pm \alpha) &= \dots \cos \alpha & \cos\left((2k-1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \dots \sin \alpha \\ \tan(k\pi \pm \alpha) &= \dots \tan \alpha & \tan\left((2k-1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \dots \cot \alpha \\ \cot(k\pi \pm \alpha) &= \dots \cot \alpha & \cot\left((2k-1)\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \dots \tan \alpha \end{aligned} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

برای تعیین علامت نسبت‌ها باید بررسی کنیم انتهای کمان در کدام ناحیه قرار می‌گیرد. (فرض کنیم α حاده است.)

$$\begin{aligned} \sin(117\pi + \alpha) &= \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha \\ \sin(117\frac{\pi}{2} + \alpha) &= \sin(58\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha) = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha \end{aligned}$$

گروه آموزشی ماز

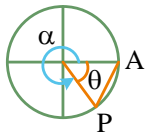


۶- نقطه $P(x, 1-2x)$ مطابق شکل روی دایره مثلثاتی قرار دارد. مساحت مثلث OAP چقدر است؟

- ۱) ۰/۲
- ۲) ۰/۴
- ۳) ۰/۳
- ۴) ۰/۱

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۳



اگر $P(x, y)$ روی دایره مثلثاتی باشد، آن‌گاه $x^2 + y^2 = 1$ است.

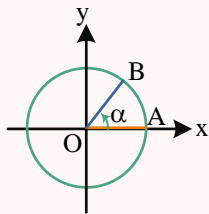
$$x^2 + (1-2x)^2 = 1 \Rightarrow 5x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{5}$$

پس $P(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ است.

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin \alpha = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} \times OA \times OP \times \sin \theta = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \frac{3}{5} = \frac{3}{10}$$

دایره مثلثاتی



دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است.

OA ضلع ثابت همه زوایا در دایره مثلثاتی است و B انتهای کمان α می‌باشد که متغیر است.

شیب خط و تانژانت

شیب هر خط که محور افقی را قطع می‌کند، برابر است با تانژانت زاویه بین آن خط و جهت مثبت محور افقی، به عبارت دیگر، اگر α زاویه‌ای باشد که خط با جهت مثبت محور افقی می‌سازد، آن‌گاه:

$$\text{شیب خط} = \tan \alpha$$

گروه آموزشی ماز



۷- اگر $\tan(x - \frac{3\pi}{2}) = 2$ باشد، مقدار $\cos 2x$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

$\frac{2}{3}$ (۲)

$\frac{3}{5}$ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

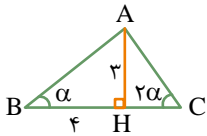
$$\tan(x - \frac{3\pi}{2}) = -\cot x = 2 \Rightarrow \cot x = -2$$

$$1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{5}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{3}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۸- در شکل زیر، طول پاره خط CH چقدر است؟



$\frac{7}{8}$ (۲)

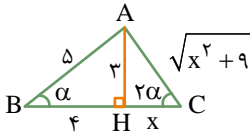
$\frac{5}{8}$ (۱)

$\frac{6}{7}$ (۴)

$\frac{4}{5}$ (۳)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲



$$\cos \alpha = \frac{4}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{7}{25} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 9}} = \frac{7}{25} \Rightarrow 625x^2 = 49(x^2 + 9)$$

$$\Rightarrow 576x^2 = 49 \times 9 \Rightarrow 24x = 7 \times 3 \Rightarrow x = \frac{7}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۹- اگر $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 7$ باشد، حاصل $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$ کدام است؟

$\frac{9}{25}$ (۴)

$\frac{16}{25}$ (۳)

$\frac{3}{5}$ (۲)

$\frac{4}{5}$ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$7 = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = (\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)^2 - 2\tan^2 \alpha \cot^2 \alpha = (\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)^2 - 2$$

$$\Rightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 3 \Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 = 3 \Rightarrow \tan \alpha + \cot \alpha = \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = \pm \sqrt{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$$

$$\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

هر وقت توان دیدی، روابط مرتبط کننده به 2α رو گوشه ذهنت داشته باش!

• $(\sin \alpha \pm \cos \alpha)^2 = \underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_{1} \pm \underbrace{2\sin \alpha \cos \alpha}_{\sin 2\alpha} = 1 \pm \sin 2\alpha$

• $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{2}{\sin 2\alpha}$

• $\tan \alpha - \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{-\cos 2\alpha}{\frac{1}{2} \sin 2\alpha} = \frac{-2\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -2\cot 2\alpha$

• $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$

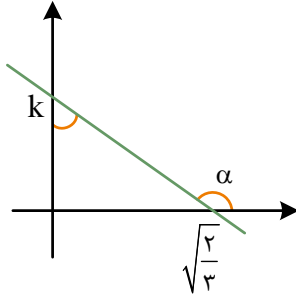


• $\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\underbrace{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}_{\cos 2\alpha})(\underbrace{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}_1) = \cos 2\alpha$

• $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = (\underbrace{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}_1)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$

گروه آموزشی ماز

۱۰- در شکل مقابل اگر $\cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$ باشد، مقدار k کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
- (۲) $\frac{2}{\sqrt{2}}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) ۱

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

azmonvip پاسخ: گزینه ۴

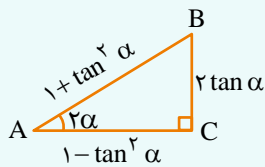
$\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = -\frac{1}{5} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

شیب خط $m = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ و خط از $A \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right)$ عبور کرده است.

$y = -\sqrt{\frac{3}{2}}x + 1 \Rightarrow k = 1$

این مثلث رو خوب بلد باش!

مثلث رو فقط برای این کشیدیم تا رابطه‌های زیر رو بهتر بتونی یاد بگیری.



- $\sin 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
- $\cos 2\alpha = \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$

روابط 2α در یک قاب!

$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
در حالت کلی‌تر $\Rightarrow \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

به عنوان مثال

$\sin(\alpha) = 2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$
 $\sin(6\alpha) = 2 \sin(3\alpha) \cos(3\alpha)$



$$\begin{cases} \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = (\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha) \\ \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \xrightarrow{\text{نتیجه}} \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \\ \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \xrightarrow{\text{نتیجه}} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$

در حالت کلی تر $\Rightarrow \cos 20^\circ = \cos^2 0^\circ - \sin^2 0^\circ = 2\cos^2 0^\circ - 1 = 1 - 2\sin^2 0^\circ$

به عنوان مثال

$$\cos(\alpha) = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\cos(20^\circ) = \cos^2(10^\circ) - \sin^2(10^\circ) = 2\cos^2(10^\circ) - 1 = 1 - 2\sin^2(10^\circ)$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

در حالت کلی تر $\Rightarrow \tan 20^\circ = \frac{2 \tan 0^\circ}{1 - \tan^2 0^\circ}$

به عنوان مثال

$$\tan(110^\circ) = \frac{2 \tan(55^\circ)}{1 - \tan^2(55^\circ)}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- اگر $\frac{2}{\sin x} + \frac{2}{\cos x} = 3\sqrt{5}$ باشد، حاصل $\sin x \cos x$ کدام است؟ (x حاده است)

۰/۸ (۱) ۰/۶ (۲) ۰/۵ (۳) ۰/۴ (۴)

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۴

$$2 \sin x + 2 \cos x = 3\sqrt{5} \sin x \cos x$$

$$2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x + 8 \sin x \cos x = 4\sqrt{5} \sin^2 x \cos^2 x \Rightarrow 4 + 8 \sin x \cos x = 4\sqrt{5} \sin^2 x \cos^2 x$$

$$\sin x \cos x = t \Rightarrow 4\sqrt{5}t^2 - 8t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{4 + \sqrt{196}}{4\sqrt{5}} \Rightarrow t = \frac{2}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲- اگر α حاده و $\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{21}{25}$ باشد، مقدار $\sin 2\alpha$ کدام است؟

۰/۸۴ (۱) ۰/۶۸ (۲) ۰/۶ (۳) ۰/۸ (۴)

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

فرض کنید $x = \alpha + \frac{\pi}{4}$ باشد، پس:

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{4}) \cos(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin x \cos(x - \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin x \cos(x - \frac{\pi}{2}) = \frac{21}{25}$$

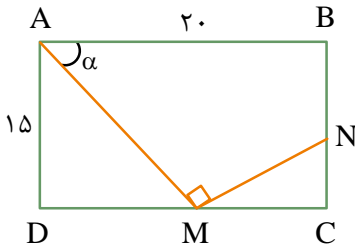
$$\Rightarrow \sin x \sin x = \frac{21}{25} \Rightarrow \sin^2 x = \frac{21}{25}$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 1 - \frac{42}{25} = -\frac{17}{25} = -\frac{17}{25} \Rightarrow \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2\alpha = -\frac{17}{25} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{17}{25}$$

گروه آموزشی ماز



۱۳- در مستطیل شکل مقابل، $NC = 5/6$ است. اگر $DM > MC$ باشد، مقدار $\tan \alpha$ کدام است؟

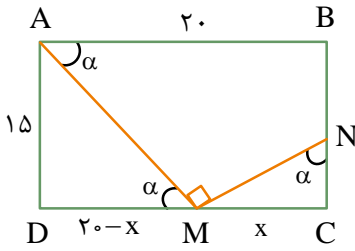


- (۱) $\frac{12}{7}$
- (۲) $\frac{15}{14}$
- (۳) $\frac{15}{13}$
- (۴) $\frac{12}{11}$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

زوایای برابر α را مشخص می‌کنیم:



$$\tan \alpha = \frac{15}{20-x} = \frac{x}{5/6}$$

$$\Rightarrow 20x - x^2 = 15 \times 5/6 = 12.5$$

$$\Rightarrow x^2 - 20x + 12.5 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x-14) = 0 \Rightarrow x = 6$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{15}{20-6} = \frac{15}{14}$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- اگر $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ باشد، حاصل $P = \frac{2 \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) + \cos(\pi + \alpha)}{\cos(\pi - \alpha) - 3 \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}$ کدام می‌تواند باشد؟

(۴) $\frac{1}{3}$

(۳) $\frac{4}{5}$

(۲) $\frac{3}{5}$

(۱) ۱

(متوسط - محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲

$$P = \frac{-2 \cos \alpha - \cos \alpha}{-\cos \alpha + 3 \sin \alpha} = \frac{3 \cos \alpha}{\cos \alpha - 3 \sin \alpha}$$

$$\cos \alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow P = \frac{\frac{9}{5}}{\frac{3}{5} - \frac{12}{5}} = -1$$

$$\cos \alpha = -\frac{3}{5} \Rightarrow P = \frac{-\frac{9}{5}}{-\frac{3}{5} - \frac{12}{5}} = \frac{3}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر $\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} + \tan \alpha = \frac{\sin \alpha - 1}{\cos \alpha}$ و $\sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیه مثلثاتی است؟

(۴) چهارم

(۳) سوم

(۲) دوم

(۱) اول

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۰۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

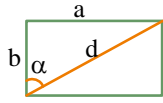
$$\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} + \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{1}{|\cos \alpha|} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

پس $\cos \alpha$ منفی است و چون $\sin \alpha \cos \alpha < 0$ است، پس $\sin \alpha$ مثبت است و α در ناحیه دوم است.

گروه آموزشی ماز



۱۶- در مستطیل شکل مقابل a طول و b عرض مستطیل است. اگر مربع طول قطر مستطیل با $\frac{2}{5}$ برابر مساحت مستطیل برابر باشد، مقدار $\cos 2\alpha$ کدام است؟



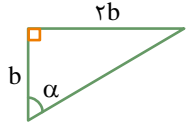
(۲) $\frac{2}{5}$
(۴) $\frac{4}{5}$

(۱) $-\frac{2}{5}$
(۳) $-\frac{4}{5}$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۱

$$d^2 = a^2 + b^2 = \frac{2}{5}ab = \frac{5}{2}ab \Rightarrow 2a^2 - 5ab + 2b^2 = 0 \Rightarrow (a - 2b)(2a - b) = 0$$



$$a > b \Rightarrow a = 2b$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{\sqrt{5}b} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۱۷- برای هر $x \neq \frac{k\pi}{4}$ تساوی $\frac{1 + \cot x}{1 + \tan x} = \frac{\sin ax}{1 - \cos ax}$ برقرار است. مقدار $\sin^2 \frac{a\pi}{6}$ کدام است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) $\frac{3}{4}$

(۱) $\frac{1}{2}$

(متوسط - مفهومی / محاسباتی - ۱۱۰۴)

پاسخ: گزینه ۲ azmonvip

$$1 + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin \frac{ax}{2} \cos \frac{ax}{2}}{2 \sin^2 \frac{ax}{2}} \Rightarrow \frac{\sin x + \cos x}{\sin x} = \cot \frac{ax}{2} \Rightarrow \cot x = \cot \frac{ax}{2}$$

به شرطی این تساوی، اتحاد است که $a = 2$ باشد.

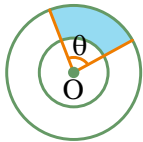
$$\sin^2 \frac{a\pi}{6} = \sin^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{4}$$

نکته طلایی!

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۸- در شکل مقابل، دو دایره هم مرکز به شعاع‌های ۳ و ۹ رسم شده است. اگر محیط رنگی برابر ۲۲ باشد، زاویه θ بر حسب رادیان کدام است؟



(۲) $\frac{2}{5}$
(۴) $\frac{4}{5}$

(۱) $\frac{2}{4}$
(۳) $\frac{5}{6}$

(آسان - محاسباتی - ۱۱۰۴)

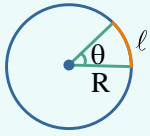
پاسخ: گزینه ۳

$$\begin{aligned} 9\theta &= \text{طول کمان در دایره بزرگتر} \\ 3\theta &= \text{طول کمان در دایره کوچکتر} \\ 9\theta + 3\theta + 12 &= \text{محیط} = 22 \Rightarrow 12\theta + 12 = 22 \end{aligned}$$

$$\text{پس } 12 + 12\theta = 22 \text{ و در نتیجه } \theta = \frac{5}{6}$$



تبدیل رادیان به درجه و بالعکس



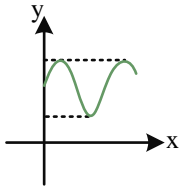
$$\pi(\text{Rad}) = 180^\circ \Rightarrow x(\text{Rad}) = \left(\frac{180}{\pi} x\right)^\circ$$

طول کمان دایره چگونه به دست میاد؟

$$(\text{rad}) \theta = \frac{l}{R} \Rightarrow l = R\theta$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع $f(x) = a + 2b \sin\left(\frac{a}{b}x\right)$ به صورت مقابل است، به طوری که بیشترین مقدار تابع سه برابر کمترین مقدار تابع باشد. دوره تناوب f کدام است؟



(۲) $\frac{\pi}{4}$

(۴) $\frac{4\pi}{3}$

است؟

(۱) $\frac{\pi}{2}$

(۳) $\frac{2\pi}{3}$

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

$$\max = 3 \min \Rightarrow a + 2|b| = 3(a - 2|b|) \Rightarrow 4|b| = a$$

$$T = \frac{2\pi}{\left|\frac{a}{b}\right|} = 2\left|\frac{b}{a}\right|\pi = \frac{\pi}{2}$$

چند نکته راجع به نمودارهای $y = a \cos(bx+c)+d$ و $y = a \sin(bx+c)+d$

۱) $T = \frac{2\pi}{|b|}$

۲) $\begin{cases} y_{\max} = d + |a| \\ y_{\min} = d - |a| \end{cases}$ دو معادله \rightarrow دو مجهول \rightarrow ۳) $\begin{cases} d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} \\ |a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} \end{cases}$

گروه آموزشی ماز

۲۰- مجموع جوابهای معادله $\cos 2x = 1 + \sin x$ در بازه $(0, 2\pi)$ کدام است؟

(۴) 3π

(۳) 4π

(۲) $\frac{5\pi}{2}$

(۱) $\frac{7\pi}{2}$

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۳ azmonvip

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x = 1 + \sin x$$

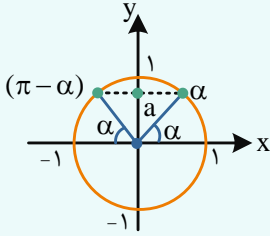
$$\Rightarrow -2 \sin^2 x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi \\ \sin x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \end{cases}$$

\Rightarrow مجموع = 4π



معادله سینوسی چطور حل می‌شه؟

برای حل معادلات به فرم $\sin x = a$ که در آن a عددی حقیقی و $-1 \leq a \leq 1$ است، ابتدا زاویه‌ای مانند α که مقدار سینوس آن برابر a باشد را پیدا کرده $(\sin \alpha = a)$ و سپس معادله $\sin x = a$ را به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌کنیم. در نهایت برای پیدا کردن جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = \sin \alpha$ داریم:



$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + (\pi - \alpha) \end{cases}$$

و در حالت کلی‌تر داریم:

$$\sin f(x) = \sin g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 2k\pi + g(x) \\ f(x) = 2k\pi + \pi - g(x) \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۲۱- معادله $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) + \sin 2x = 0$ در بازه $[0, 2\pi]$ چند جواب دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

$$\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = -\sin 2x = \sin(-2x) \Rightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = -2x + 2k\pi \Rightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + 2k\pi \quad \times \end{cases}$$

جواب‌های معادله در بازه $[0, 2\pi]$ برابر $\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$ است.

گروه آموزشی ماز

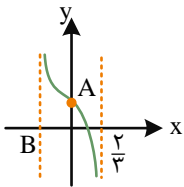
۲۲- نمودار تابع $f(x) = a - \tan(\frac{\pi}{a}x)$ به صورت مقابل است. شیب پاره خط AB کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

$\frac{3}{2}$ (۴)

$\frac{2}{3}$ (۳)



(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

تابع f نزولی است، پس $a > 0$ است. در $x = \frac{2}{3}$ مقدار $\cos \frac{\pi}{a}x$ برابر صفر است.

$$\cos(\frac{\pi}{a} \times \frac{2}{3}) = 0 \Rightarrow \frac{2\pi}{3a} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{4}{3}$$

$$\cos(\frac{\pi}{a} x_B) = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{a} \times x_B = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x_B = -\frac{a}{2} = -\frac{2}{3}$$

$$y_A = f(0) = a = \frac{4}{3}$$

$$m_{AB} = \frac{y_A}{|x_B|} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} = 2$$

گروه آموزشی ماز



۲۳- اگر کوچک ترین جواب مثبت معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ باشد، حاصل $\tan^2 \alpha$ کدام است؟

$\frac{1}{16}$ (۴)

۱۶ (۳)

۱۵ (۲)

$\frac{1}{15}$ (۱)

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

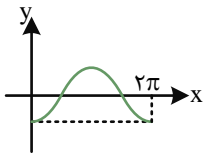
$4 \sin x \cos x - \sin x = 0$

$\sin x (4 \cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{4} \end{cases}$

پس $\cos \alpha = \frac{1}{4}$ و در نتیجه $\sin \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ و $\tan^2 \alpha = 15$.

گروه آموزشی ماز

۲۴- نمودار تابع $f(x) = 1 + a \cos^2(\frac{x}{a})$ در یک دوره تناوب به صورت مقابل است. مقدار $f(\frac{a\pi}{3})$ کدام است؟



$\frac{1}{2}$ (۲)
 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۴)

$-\frac{1}{2}$ (۱)
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳)

(آسان - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۲

$T = 2\pi = \frac{\pi}{\frac{1}{|a|}} \Rightarrow |a| = 2$

چون $f(0) < 0$ است، پس $a = -2$ است.

$f(x) = 1 - 2 \cos^2(\frac{x}{2}) = -\cos x$

$f(\frac{a\pi}{3}) = f(\frac{-2\pi}{3}) = -\cos(-\frac{2\pi}{3}) = \frac{1}{2}$

گروه آموزشی ماز

۲۵- معادله $\cos^2 x - 2 \sin^2 x = 0$ در بازه $(0, \alpha)$ سه جواب دارد. حداکثر α کدام است؟

$\frac{11\pi}{6}$ (۴)

$\frac{7\pi}{6}$ (۳)

$\frac{4\pi}{3}$ (۲)

$\frac{5\pi}{3}$ (۱)

(سخت - مفهومی / محاسباتی - ۱۴۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

$\cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = \pm \frac{1}{2}$

$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6} \Rightarrow \alpha = \frac{11\pi}{6}$

گروه آموزشی ماز